Estratto dal *Periodico di Matematiche*
Novembre 1950 - Serie IV, vol. XXVIII, n. 3 (pagg. 184-188)

C. F. MANARA

Studio delle podarie rispetto a coniche

NICOLA ZANICHELLI EDITORE
BOLOGNA

PERIODICO DI MATEMATICHE

Il *Periodico di Matematiche* continua la pubblicazione per le scuole medie che, iniziata in Roma da Davide Besso nel 1886, fu curata fino al 1896 da Aurelio Lugli, già dal secondo anno associato alla direzione, e proseguita poi in Livorno da Giulio Lazzeri, fra il 1897 e il 1918; fu rinnovato da F. Enriques nel 1921 e da Lui diretto fino al 1946.

Il *Periodico* pubblica sopratutto articoli riguardanti le matematiche elementari intese in senso lato, ed altri tendenti ad una più vasta comprensione dello spirito matematico. Esso contiene inoltre relazioni del movimento matematico straniero, note di bibliografia e di trattatistica, varietà (problemi, giuochi, paradossi, etc.) nonchè notizie di carattere professionale.

Il terzo numero (Novembre 1950) della ventottesima annata consta di 64 pagine e contiene, oltre le Recensioni e le Questioni, i seguenti articoli:

A. Agostini - *Il metodo delle tangenti fondato sopra la dottrina dei moti nelle opere di Torricelli.*

A. Tosi - *La « Nova stereometria doliorum vinariorum » di Keplero.*

C. Benedetti - *La funzione θ_n collegata alla costante di Eulero-Mascheroni.*

A. Carosella - *Alcune semplici applicazioni geometriche all'analisi indeterminata.*

C. F. Manara - *Studio delle podarie rispetto a coniche.*

A. Marengoni - *Una sottigliezza didattica.*

Abbonamento annuo: Italia L. 500 — - Estero L. 1000

Il *Periodico* si pubblica in 3 fascicoli annuali.

L'importo dell'abbonamento e ogni altra comunicazione di indole amministrativa deve inviarsi esclusivamente alla Casa Editrice Nicola Zanichelli.

Le annate complete 1924, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 46, 47, 48 e 49 dell'attuale serie del

PERIODICO DI MATEMATICHE

sono in vendita al prezzo di L. 1000 l'annata, per l'Italia.

L. 1500 per l'estero.

Esistono fascicoli separati dei 20 volumi al prezzo di:

L. 350 al fascicolo per l'Italia — L. 600 per l'estero.

Estratto dal *Periodico di Matematiche*.
Novembre 1950 - Serie IV, vol. XXVIII, n. 3 (pagg. 184-188)

C. F. MANARA

Studio delle podarie rispetto a coniche

NICOLA ZANICHELLI EDITORE
BOLOGNA

Bologna Cooperativa Tipografica Azzoguidi

Studio delle podarie rispetto a coniche [1]

Lo studio delle podarie rispetto a coniche potrebbe essere fatto come meccanica applicazione del noto teorema in forza del quale la podaria di un punto O rispetto ad una curva γ si ottiene trasformando anzitutto γ mediante la polarità rispetto ad un qualunque cerchio Γ di centro O e successivamente trasformando la curva così ottenuta mediante l'inversione circolare di centro O avente Γ come cerchio di punti uniti. Il nostro lettore può vedere utilmente l'articolo divulgativo di M. Dedò: *Varii aspetti sotto cui si presentano le trasformazioni quadratiche e legami ad essi relativi*, comparso da poco in questo « Periodico » (vol. XXVII, n. 3, nov. 1949), dove appunto per tale via vengono determinate le proprietà essenziali delle podarie rispetto a coniche.

Crediamo tuttavia non inutile dare del tema una trattazione diretta che, indipendente dal teorema sopra citato, si basi su considerazioni del tutto elementari.

Sia dunque L la podaria di un punto O (polo) rispetto ad una conica K, cioè il luogo dei piedi delle perpendicolari calate da O alle tangenti di K, che in tutta questa trattazione sarà supposta a punti reali e non degenere.

È subito visto anzitutto che L è una curva algebrica razionale. Infatti, chiamiamo T un punto qualunque di K, t la retta ivi tangente a K, P il punto di intersezione di t con la perpendicolare ad essa per O (punto che per definizione ap-

---

[1] N. d. R. - Abbiamo trasportato questa risposta fuori della Rubrica « Questioni » perchè ci sembra che essa possa interessare una classe più ampia di lettori; essa non è infatti una esercitazione utile per il solo autore, ma un suggestivo invito a trattare tali questioni in via puramente sintetica.

partiene ad L e che diremo brevemente, qui e nel seguito, corrispondente di T); è chiaro che le coordinate di P si ottengono da quelle di T con operazioni algebriche a risultato unico e pertanto sono funzioni razionali di esse; le quali, a loro volta, sono esprimibili razionalmente in funzione di un parametro.

In secondo luogo è facile vedere che O è nodo, cuspide o punto doppio isolato di L a seconda che sia rispettivamente fuori di K, su K od interno a K. Infatti supponiamo, per fissare le idee, che O sia esterno a K; allora, quando si faccia descrivere a T la K, la t verrà a passare due volte per O e pertanto L verrà a passare per O con due rami reali che, come è facile controllare, hanno ivi per tangenti le normali alle tangenti mandate da O a K. Questo ragionamento, se pur fatto qui sulla base della intuizione geometrica, ammette una immediata traduzione analitica e quindi conserva il suo valore anche quando le tangenti mandate da O a K siano complesse coniugate (perchè O risulta interno a K) ed, al limite, quando O viene a cadere su K.

La conoscenza del fatto che O è doppio per la curva L permette ora di calcolare l'ordine n di essa, intersecandola con una retta generica r per O; infatti, detto s il numero delle intersezioni di r con L fuori di O, si avrà $n = s + 2$. Supponiamo provvisoriamente, e finchè non sarà detto esplicitamente il contrario, che K sia una conica generica, cioè a centro (il caso della parabola sarà trattato in seguito come caso limite); allora è chiaro che esistono due tangenti a K perpendicolari ad r, che intersecano questa retta in due punti, ovviamente fuori di O per la genericità di r stessa. Quindi $s = 2$ ed $n = 4$.

Sia ora C_1 uno dei punti ciclici; per esso passano due tangenti a K le quali, per note proprietà delle rette isotrope, sono normali alla $C_1 O$; ne deduciamo che i punti ciclici sono doppi per la L.

Ulteriori proprietà seguono facilmente dal seguente semplice

LEMMA. - La retta p, tangente ad L in un punto P, è pure tangente al cerchio di diametro OT (ovviamente passante per P).

Invero siano T e T_1 due punti vicini di K: t e t_1 le rispettive tangenti a K in essi; P e P_1 i punti di L rispettivamente corrispondenti di T e T_1 e sia T_0 il punto di intersezione di t e t_1 (v. fig. 1). I punti P e P_1 stanno sul cerchio di diametro OT_0; fatto tendere T_1 a T pure T_0 tende a T e P_1 a P con che la congiungente di P con P_1 ha come posizione limite quella della tangente in P al cerchio di diametro OT.

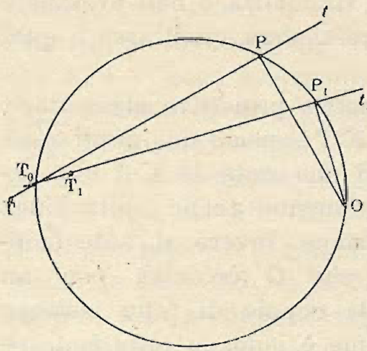

Fig. 1.

Ne segue che L è tangente a K ovunque la incontra e precisamente nei punti che sono i piedi delle normali a K per O; infatti in tal caso P e T coincidono e quindi anche le rette p e t.

Poichè, come noto, tali normali sono in numero di quattro, si ha una conferma del fatto che l'ordine di L è pure quattro, essendo otto le sue intersezioni con K.

Facciamo ora variare con continuità la K sino a farla divenire, al limite, una parabola. Come è noto, in questo caso uno dei piedi delle normali mandate da O alla K (e quindi punto di contatto tra L e K) tende al punto improprio di essa; quindi al limite la L verrebbe a possedere sei intersezioni con la retta impropria: due in ognuno dei punti ciclici e due nel punto improprio di K.

Quindi la L viene a spezzarsi nella retta impropria ed in una residua cubica passante semplicemente per i punti ciclici. Possiamo riassumere le proprietà fin qui dimostrate enunciando il seguente

TEOREMA I. - La podaria L di un punto O rispetto ad una conica K è una quartica razionale bicircolare avente in O un punto doppio le cui tangenti principali sono le normali alle tangenti per O a K. Essa è tangente a K ovunque la incontra e precisamente nei quattro punti che sono i piedi delle normali mandate da O a K; se questa è una parabola, L si spezza venendo a contenere la retta impropria.

In tutto quanto precede abbiamo tacitamente supposto che O fosse un punto al finito; si verifica subito che qualora O fosse un punto improprio O_∞ la L si spezzerebbe (nella retta impropria contata due volte e) nelle due tangenti a K normali alla direzione di O_∞ stesso se K è a centro oppure (nella retta impropria contata tre volte e) nella tangente a K normale alla direzione di O_∞ se K è una parabola.

Per quanto riguarda le posizioni particolari che O può prendere rispetto ad K, dalla definizione stessa di L si trae subito che se O sta su un asse di simmetria o nell'eventuale centro di simmetria di K, pure L possiederà quell'asse e quel centro di simmetria [1].

Infine, come è noto dalla geometria proiettiva elementare, se O coincide con un fuoco F di K l'insieme dei punti reali di L si riduce ad un cerchio (o ad una retta se K è una parabola). E questo si dimostra facilmente anche nella linea fin qui tenuta dalla nostra trattazione. Invero si vede facilmente che, nella ipotesi posta che O coincida con un fuoco F di K, la L si spezza nella coppia di rette isotrope per O e in un cerchio; infatti, come è noto, le rette isotrope per F sono tangenti a K e d'altra parte, come abbiamo già ricordato, esse sono perpendicolari a sè stesse, per cui ogni loro punto appartiene ad L. La parte residua deve essere una conica che, insieme con la coppia di rette isotrope per F dia una quartica bicircolare: quindi un cerchio, il quale inoltre, per il Lemma, deve essere bitangente a K negli estremi dell'asse cui F appartiene; eventualmente, se K è una parabola, questo cerchio è ulteriormente spezzato in una retta propria e nella retta impropria.

Vale anche la proprietà inve sa cioè: se la L si riduce ad un cerchio C (o una retta nel caso della parabola) O cade necessariamente in un fuoco di K. Ciò segue facilmente da quanto è stato fin qui detto. Infatti se la L viene a contenere un cerchio C la parte residua — diciamola C' — deve essere ancora un cerchio avente un punto doppio in O; quindi C' deve ridursi alla coppia di rette isotrope per O, le quali inoltre devono essere tangenti a K; e pertanto O risulta essere fuoco di K stessa. Ma è facile dimostrare la cosa anche rimanendo nel campo della geometria proiettiva elementare. Infatti K si presenta come l'inviluppo delle rette t normali alle rette del fascio O nei punti in cui queste ultime incontrano il cerchio C.

---

(1) Infatti è chiaro che ogni omografia che conserva le relazioni metriche (e quindi in particolare gli angoli retti) e muta in sè contemporaneamente O e K muta pure in sè anche la L.

Si riconosce facilmente anzitutto che tale inviluppo è di classe due e quindi è formato soltanto dall'insieme delle tangenti a K. In secondo luogo se O cade nel centro G del cerchio C allora K coincide con C e la tesi è evidente, altrimenti il diametro d che unisce O con G è chiaramente asse di simmetria della intera figura (v. fig. 2) in modo che K e C sono bitangenti tra loro negli estremi di d, avendo ivi come tangenti comuni le due rette u, v ivi normali a d. Detto D_∞ il punto improprio comune alle u, v è chiaro che D_∞ è polo di d rispetto a K e quindi le rette OG ed OD_∞ tra loro normali, sono coniugate rispetto a K. Altre due rette tra loro coniugate rispetto a K (in base al duale di un noto teorema di STAUDT) e tra loro perpendicolari (in base a proprietà di posizione facilmente riconoscibili) si ottengono proiettando da O le intersezioni di u e v con una tangente t a K normale alle u, v. Quindi l'involuzione delle rette per O coniugate rispetto a K risulta l'involuzione circolare ed O è per definizione fuoco di K.

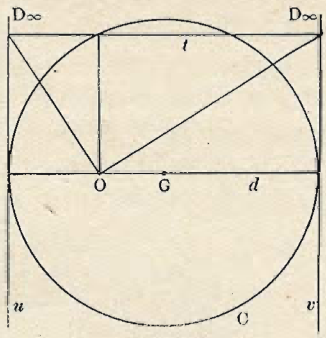

Fig. 2.

Il lettore farà facilmente da sè le ovvie modifiche che occorrono al ragionamento precedente nel caso in cui K sia parabola e quindi C si riduca ad una retta.

Quindi, se chiamiamo podaria di O rispetto a K la curva irriducibile contenente il piede della perpendicolare mandata da O ad una tangente generica di K, potremo enunciare il

TEOREMA II. - Condizione necessaria e sufficiente perchè la podaria di un punto O rispetto ad una conica K sia un cerchio (eventualmente degenere nella retta impropria ed in una retta residua se K è una parabola) è che O sia un fuoco di K.

Atti del Congresso internazionale dei Matematici (1928) 6 volumi. ciascuno	L. 1000
Atti del primo Congresso dell'Unione Matematica Italiana, tenuto in Firenze nei giorni 1-2-3 Aprile 1937 . .	» 1000
BELLUZZI - *Scienza delle costruzioni.* Vol. I	» 3000
— — *Scienza delle costruzioni.* Vol. II, p. I	» 900
— — *Scienza delle costruzioni.* Vol. II, p. II	» 800
— — *Scienza delle costruzioni.* Vol. II, p. III	» 1000
— — *Scienza delle costruzioni.* Vol. III, p. I	» 800
— — *Metodi semplici per lo studio delle lastre curve* . .	» 400
BOLCATO - *La chimica delle fermentazioni*	» 1200
BORTOLOTTI - *La storia della Matem. nella Univ. di Bologna* .	» 600
BRONZI - *La tecnica dei radiotrasmettitori*	» 4000
BURGATTI - *Lezioni di meccanica razionale*	» 500
CANNERI - *Nozioni di chimica analitica*	» 1200
CASTELNUOVO - *Calcolo delle probabilità.* Vol. I	» 1200
— — *Memorie scelte,* pubblicate in occasione del giubileo scientifico	» 1250
CHISINI - *Lezioni di geometria analitica e proiettiva* . . .	» 1500
— — *Esercizi di geometria analitica e proiettiva* . . .	» 1200
DONATI - *Memorie e note scientifiche*	» 400
DORE - *Fondamenti di fotogrammetria*	» 800
ENRIQUES - *Il significato della storia del pensiero scientifico*	» 150
— — *Le superficie algebriche*	» 3000
ENRIQUES e DE SANTILLANA - *Compendio di storia del pensiero scientifico*	» 750
ENRIQUES e MAZZIOTTI - *Le dottrine di Democrito d'Abdera*	» 1500
EVANGELISTI - *La regolazione delle turbine idrauliche* . .	» 2000
FINZI - *Meccanica razionale.* Voll. I-II	» 2400
FINZI e PASTORI - *Calcolo tensoriale e applicazioni* . . .	» 2000
FORTI - *Introduzione storica alla lettura del «Dialogo sui massimi sistemi» di Galileo Galilei*	» 300
FUBINI e ALBENGA - *La matematica dell'ingegnere e le sue applicazioni.* Vol. I	» 4000
FUBINI e CECH - *Geometria differenziale.* I-II	» 1600
LEVI-CIVITA - *Caratteristiche dei sistemi differenziali ecc.* .	» 200
LEVI-CIVITA, AMALDI - *Nozioni di balistica esterna* . . .	» 150
LEVI-CIVITA, AMALDI - *Compendio di mecc. razionale.* I . .	» 1200
— — *Compendio di mecc. razionale.* II	» 1200